The Extended Helmholtz-Ellis JI Pitch Notation

microtonal accidentals designed by / mikrotonale Vorzeichen konzipiert von
Marc Sabat & Wolfgang von Schweinitz, 2004

English Text : Marc Sabat, 2005
Deutsche Fassung : Natalie Pfeiffer

PLAINSOUND MUSIC EDITION

The Extended Helmholtz-Ellis JI Pitch Notation

microtonal accidentals designed by / mikrotonale Vorzeichen konzipiert von
Marc Sabat & Wolfgang von Schweinitz, 2004

English Text : Marc Sabat
Deutsche Fassung : Natalie Pfeiffer

PLAINSOUND MUSIC EDITION

„Die Obertonreihe ... enthält noch viele Probleme, die eine Auseinandersetzung nötig machen werden. Und wenn wir diesen Problemen augenblicklich noch entrinnen, so verdanken wir das fast ausschließlich einem Kompromiß zwischen den natürlichen Intervallen und unserer Unfähigkeit sie zu verwenden. Jenem Kompromiß, das sich temperiertes System nennt, das einen auf eine unbestimmte Frist geschlossenen Waffenstillstand darstellt. Diese Reduktion der natürlichen Verhältnisse auf handliche wird aber die Entwicklung auf die Dauer nicht aufhalten können; und das Ohr wird sich mit den Problemen befassen müssen, weil es will. Dann wird unsere Skala ebenso aufgehen in eine höhere Ordnung, wie die Kirchentonarten in der Dur- und Molltonart aufgegangen sind. Ob dann Viertel-, Achtel-, Drittel- oder (wie Busoni meint) Sechsteltöne kommen, oder ob man direkt zu einer 53 tönigen Skala übergehen wird ... läßt sich nicht voraussagen. Vielleicht wird diese neue Teilung der Oktave sogar untemperiert sein und mit unserer Skala nur noch wenig gemeinsam haben."

Arnold Schoenberg: **Harmonielehre**, 3. Auflage, S. 22-24 (1922)

"The overtone series … still contains many problems that will have to be faced. And if for the time being we still manage to escape those problems, it is due to little else than a compromise between the natural intervals and our inability to use them – that compromise which we call the tempered system, which amounts to an indefinitely extended truce. This reduction of the natural relations to manageable ones cannot permanently impede the evolution of music; and the ear will have to attack the problems, because it is so disposed. Then our scale will be transformed into a higher order, as the church modes were transformed into major and minor modes. Whether there will then be quarter tones, eighth, third, or (as Busoni thinks) sixth tones, or whether we will move directly to a 53-tone scale … we cannot foretell. Perhaps this new division of the octave will even be untempered and will not have much left over in common with our scale."

Arnold Schoenberg: **Theory of Harmony** 3rd Edition, p. 25 (1922)
English translation by Roy E. Carter

INTRODUCTION

The Extended Helmholtz-Ellis JI Pitch Notation has been devised for the composition and performance of new music using the sonorities of Just Intonation. It introduces new accidentals, which raise and lower pitches by specified microtones and provide visually distinctive “logos” distinguishing “families” of natural intervals based on the harmonic series.

In conventional music notation, the written notes establish *interval classes* (e.g. “minor third” etc.). It is assumed that the *intonation* of any given interval is determined by various contextual factors, and thus left open to *interpretation*. Harmonic implications of the music, the tuning or temperament of instruments, historical performance practice etc. influence decisions made about the actual pitch of written notes.

To differentiate intonation *within* each interval class, a more refined notation becomes necessary. For example: the overtone series, though easily played on orchestral string and brass instruments in the form of natural harmonics, can only be approximately written up with conventional accidentals, becoming ambiguous by the 7^{th} partial (e.g. the overtone relationships 5:6 and 6:7, which both would have to be written as the same “minor third”).

The Extended Helmholtz-Ellis JI Pitch Notation enables *exact* notation of all intervals that may be tuned directly by ear (natural intervals). It provides a method of writing any pitch-height in the glissando-continuum as a note on the five-line staff, and of specifying, in the case of any natural interval, the *harmonic relationships* by which this note may be precisely tuned.

DEFINITIONS

A sound producing the sensation of one predominant, well-defined *pitch-height* is referred to as a *pitch*. Given any two pitches, the *distance* between them is called an *interval*. This distance may be measured both as a *melodic distance,* which is the *difference between the pitch-heights,* and as a *harmonic distance,* which is commonly understood as the degree of "consonance" or "dissonance" of the combined sound. These two measures of intervals suggest two possible approaches to the notation of pitches.

The sensation of pitch-height is directly related to *frequency of vibration*, measured in vibrations per second or Hertz (Hz). Greater frequencies produce higher pitches. Since frequency varies *exponentially* in relation to pitch-height, intervals may be expressed as *frequency ratios*.[1] Intervals which may be written as ratios of natural numbers are called *natural* or *just* intervals. For example, two frequencies in the proportion[2] 1:2 always form the just interval of an octave. To add intervals together, their frequency ratios must be *multiplied*.

By dividing the frequency ratio 1:2 into 1200 "steps of equal size", called *cents*, it is possible to construct a *linear measure* of the distance between pitches.[3] In this way, the entire continuum of pitch may be represented, including irrational relationships like the Equal Tempered semitone (100 cents). To add intervals together, their cents distances must be *added*.

While cents measure the relative size of intervals, frequency ratios are used to determine harmonic distance, which is defined *for natural intervals only*. Analysis of a ratio involves first reducing its fraction to the mathematically simplest form (lowest terms), with both numerator and denominator written as a product of prime factors. Since these prime factors cannot be reduced further, each of them represents a *primary natural interval* of the form 1:p (p represents a prime number). For example, 1:2 (octave) is a primary natural interval, as are 1:3 (octave plus fifth), 1:5 (2 octaves plus major third), 1:7 (2 octaves plus natural seventh) etc. These primary musical "steps" establish the harmonic relationship between an interval's two pitches. The harmonic distance of an interval is determined by the *number* of its primary natural intervals and the *size* of their respective primes. The largest prime number making up a ratio is referred to as the interval's "limit".

---

[1] Pitch-height is proportional to the logarithm of frequency. Given two pitches P_2 with frequency $Freq_2$ and P_1 with frequency $Freq_1$, a constant melodic distance implies a constant ratio of frequencies: $\Delta_m = |P_2 - P_1| = |C\cdot\log(Freq_2) - C\cdot\log(Freq_1)| = |C\cdot\log(^{Freq2}/_{Freq1})|$.

[2] The proportional ratio notation a:b represents an interval without being concerned whether it is determined above or below a given pitch. In this paper, a proportion is always written with the lower number first. Dividing by a gives the equivalent proportion $1:(^b/_a)$. Dividing by b gives the equivalent proportion $(^a/_b):1$. When written as a fractional ratio $(^b/_a)$ or $(^a/_b)$, an interval *above* or *below* a given note is represented.

[3] Mathematically, 1 cent is defined as the frequency ratio $1:\sqrt[1200]{2}$. Cents are calculated by the formula Cents = $(^{1200}/_{\log(2)})\cdot\log(^{Freq2}/_{Freq1})$.

As an illustration, consider the natural minor triad with frequency ratios 10:12:15. The lower interval 10:12 may be reduced to a simple (Ptolemaic) minor third 5:6. This interval above a given pitch is written as the fraction $(^6/_5)$. The numerator may be written as 2·3 (= 6). The denominator is already a prime number (5). Since 5 is the largest prime number making up this ratio, $(^6/_5)$ is called a *5-limit interval*. Thus, the interval may be written as a product of primary natural intervals: $(^6/_5) = (^2/_1)\cdot(^3/_1)\cdot(^1/_5)$. These three primary intervals are the primary musical steps by which the *upward* interval $(^6/_5)$ may be constructed and tuned: $(^2/_1)$ means "*up* one octave"; $(^3/_1)$ means "*up* one octave plus one fifth"; $(^1/_5)$ means "*down* two octaves plus one major third". A similar analysis may be applied to the upper interval 12:15 or to the outer interval 10:15.

The notion that all ratios may be derived from primary natural intervals suggests a rasterized general model of the pitch continuum in the form of a multidimensional tone-lattice, defined as "harmonic space" by JAMES TENNEY in his paper "John Cage and the Theory of Harmony" (1983). Each prime number generates an axis in this space. Natural intervals may be represented by co-ordinates.

Any interval that can be tuned by ear may be written as a ratio, which contains in compact form *the complete harmonic information about its sound*. From this ratio it is possible to deduce the *periodicity pitch* (the interval's common fundamental), the *combination tones* and the chord of *combined partial tones* (including characteristic beatings and unisons).

In the *vicinity* of each tuneable ratio is a *region of tolerance* within which variations of tuning produce audible *beating* and *phasing*. These phenomena make it difficult or impossible to tune other more complex ratios falling within this region. Instead, our sense of hearing interprets them as *mistuning* or *detuning* of the predominating simpler ratio *(temperament).* The existence of such regions, each dominated by a single frequency ratio, implies that there is a *finite number* of intervals which can be tuned by ear.

The property of *tuneability* suggests the following definition: a *consonance* is an interval that *may be exactly tuned by ear*. This distinguishes consonances from *tuneable dissonances*, which may only be tuned *by construction* through a *succession* of consonances. Harmonic distance may then be considered to be a measure of the *degree* of consonance or dissonance of an interval, a property that Schönberg described as its *comprehensibility*.

THE NOTATION

The *Extended Helmholtz-Ellis JI Pitch Notation* combines two ways of describing intervals (linear and proportional), using signs derived from traditional staff notation. It extends the idea used by HERMANN VON HELMHOLTZ of explicitly notating the *microtonal comma alteration* in the tuning of pure thirds. It also draws on ALEXANDER ELLIS' method of measuring the size of intervals using cents. It is an exact and fully transposable Just Intonation notation, which can also include irrational and tempered intervals.

Each prime factor making up a ratio is associated with a specific *family of accidental signs,* allowing the ratio to be directly deduced from the combined accidentals. Cents indications placed above or below the accidentals provide an alternative method of specifying pitch, and are to be read in relation to the twelve Equal Tempered semitones.

The prime factor 2 is taken as an identity: the same note-names apply in all octaves *(octave equivalence).* The prime factor 3 is already implicit in the traditionally notated *series of perfect fifths*, in which frequency ratios of 2:3 are represented by conventional accidentals (double-flats, flats, naturals, sharps, and double-sharps). These signs are referred to as *Pythagorean accidentals*, and pitches 12 fifths apart *differ by a Pythagorean comma* (23.5 cents). The prime factor 5 is notated by attaching downward or upward arrows to the Pythagorean accidentals. An arrow indicates an alteration by a *syntonic comma* 80:81 (21.5 cents), which is the difference between the simple (Ptolemaic) major third 4:5 (= 64:80) and the Pythagorean major third (64:81).

Each new *prime factor* necessitates a new *pair* of accidental signs to notate all possible ratios *above* and *below* a pitch, and thus precisely define their positions within the grid of James Tenney's "harmonic space". However, the number of new consonances decreases as the size of prime factors increases. Primary natural intervals with primes higher than 23 are very difficult to tune, and for most purposes restriction to prime factors 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 and 23 can be considered a sufficient notational representation.

The accidental signs for each new prime are defined as *microtonal modifications* of melodically "nearby" pitches already established by ratios composed of lower primes. For example, the 7th partial is notated as an alteration of the interval produced by the combination of two perfect fourths (Pythagorean minor seventh). This difference, between the intervals 4:7 (= 36:63) and 9:16 (= 36:64), is the *septimal comma* 63:64 (27.3 cents), and its pair of signs resembles an inverted numeral 7.

In the following chart, these alterations are represented by symbols and explicitly defined as frequency ratios. An alteration is called a "Thirdtone", "Quartertone", "Comma" or "Schisma" depending on its size. The accidentals found in the first column are used to write overtones (i.e. 7th partial, etc.) and the accidentals found in the second column are used to write the same intervals below a pitch (undertones). A special form of the conventional accidentals with an added horizontal line suggesting the form of the letter "T" is used to indicate the twelve Equal Tempered semitones.

Three additional pages with note examples are included to demonstrate the Extended Helmholtz-Ellis JI Pitch Notation. They show the first 64 pitches of an harmonic series based on "A" (overtones); the same intervals *below* "A" (undertones); HARRY PARTCH's 43-tone scale of pitches in Just Intonation; and a list of intervals tuneable by ear notated above a violin A-string.

EINFÜHRUNG

Die *Extended Helmholtz-Ellis JI Pitch Notation* wurde für die Komposition und Aufführung neuer Musik konzipiert, die die Sonoritäten der natürlichen Stimmung *(Just Intonation)* verwendet. Die neu eingeführten Vorzeichen erhöhen bzw. erniedrigen Töne um angegebene Mikrointervalle. Sie stellen optisch charakteristische "Logos" dar, welche zur Unterscheidung der auf der Obertonreihe basierenden „Familien" natürlicher Intervalle dienen.

In der konventionellen Notenschrift legen die geschriebenen Noten *Intervallklassen* (z.B. „kleine Terz" etc.) fest. Es wird angenommen, dass die *Intonation* jedes gegebenen Intervalls von verschiedenen Faktoren des Kontexts abhängt und somit in den Bereich der *Interpretation* fällt. Harmonische Implikationen, die Stimmung oder Temperatur von Instrumenten, Aspekte der historischen Aufführungspraxis und andere mehr bestimmen die Entscheidungen über die tatsächliche Tonhöhe geschriebener Noten.

Um die Variationsmöglichkeiten der Intonation *innerhalb* einer Intervallklasse zu unterscheiden, wird eine erweiterte Notation benötigt. Ein Beispiel: Obwohl die Obertonreihe so einfach auf den Streich- und Blechblasinstrumenten des Orchesters gespielt werden kann, ist ihre Repräsentation in der herkömmlichen Notation schon ab dem 7. Partialton unzureichend (zum Beispiel die Obertonverhältnisse 5:6 und 6:7, die beide als die gleiche „kleine Terz" notiert werden müssten).

Die Extended Helmholtz-Ellis JI Pitch Notation ermöglicht die *exakte* Notation aller Intervalle, die direkt nach Gehör gestimmt werden können (natürliche Intervalle). Sie ist eine Methode, nach der jede Tonhöhe des Glissando-Kontinuums als Note auf dem Fünf-Linien-System aufgeschrieben werden kann. Liegt ein natürliches Intervall vor, so erlaubt sie außerdem die Spezifizierung der *harmonischen Verhältnisse*, anhand derer diese Note präzise gestimmt werden kann.

DEFINITIONEN

Ein Klang, der die Wahrnehmung einer vorherrschenden, klar definierten *Tonhöhe* produziert, wird als *Ton* bezeichnet. Sind zwei beliebige Töne vorgegeben, wird die *Distanz* zwischen ihnen *Intervall* genannt. Diese Distanz kann auf zweierlei Arten gemessen werden, nämlich als eine *melodische Distanz,* das ist die *Differenz der Tonhöhen*, und als eine *harmonische Distanz*, welche üblicherweise als Grad der „Konsonanz“ oder „Dissonanz“ der kombinierten Töne verstanden wird. Diese beiden Maßstäbe für Intervalle deuten auf zwei Herangehensweisen für die Notation der Töne hin.

Die Empfindung der *Tonhöhe* steht im direkten Bezug zur *Schwingungsfrequenz***,** die in Hertz (Hz), das sind Schwingungen pro Sekunde, gemessen wird. Größere Frequenzen produzieren höhere Töne. Da die Frequenz sich *exponentiell* zur Tonhöhe verhält, können Intervalle als *Schwingungsverhältnisse* erfasst werden.[1] Intervalle, die als Schwingungsverhältnisse natürlicher Zahlen notiert werden können, werden *natürliche* oder *reine* Intervalle genannt. Zum Beispiel bilden zwei Frequenzen in der Proportion[2] 1:2 immer das Intervall der Oktave. Bei der Addition von Intervallen werden ihre Schwingungsverhältnisse *multipliziert*.

Durch Teilen des Schwingungsverhältnisses 1:2 in 1200 „Schritte gleicher Größe“, genannt *Cents*, ist es möglich, ein *lineares Maß* des Abstands zwischen Tonhöhen zu konstruieren.[3] Auf diese Weise kann das gesamte Kontinuum der Töne dargestellt werden, was irrationale Verhältnisse, wie zum Beispiel den gleichstufig temperierten Halbton (100 Cents), mit einbezieht. Bei der Addition von Intervallen werden ihre Abstände in Cents *addiert*.

Während Cents die relative Größe der Intervalle messen, werden Schwingungsverhältnisse zur Bestimmung der harmonischen Distanz verwendet, welche *nur für natürliche Intervalle* definiert ist. Die Analyse eines Schwingungsverhältnisses bedeutet zunächst die Kürzung seines Bruches auf die mathematisch einfachste Form (kleinste Einheiten), wobei Zähler und Nenner als Produkte von Primfaktoren erscheinen. Da diese Primfaktoren nicht weiter verkleinert werden können, repräsentiert jeder von ihnen ein *primäres natürliches Intervall* in der Form 1:p (p steht für Primzahl). So ist 1:2 (Oktave) ein primäres natürliches Intervall wie auch 1:3 (Oktave plus Quinte), 1:5 (zwei Oktaven plus große Terz), 1:7 (zwei Oktaven plus Naturseptime) etc. Diese musikalischen „Primärschritte“ etablieren das

---

[1] Die Tonhöhe ist proportional zum Logarithmus der Frequenz. Sind zwei Töne P_1 und P_2 mit den Frequenzen $Freq_1$ und $Freq_2$ vorgegeben, so impliziert eine gleichbleibende melodische Distanz ein gleichbleibendes Verhältnis der Schwingungen:
$\Delta_m = |P_2 - P_1| = |C\cdot\log(Freq_2) - C\cdot\log(Freq_1)| = |C\cdot\log(^{Freq2}/_{Freq1})|$.

[2] Die proportionale Notation eines Schwingungsverhältnis a:b stellt ein Intervall dar, ohne dabei eine Aussage darüber zu machen, ob es sich über oder unter einer gegebenen Tonhöhe befindet. In diesem Artikel beginnt die proportionale Notation immer mit der kleineren Zahl. Die Teilung des Verhältnisses durch a ergibt eine äquivalente Proportion $1:(^b/_a)$. Die Teilung durch b ergibt eine äquivalente Proportion $(^a/_b):1$. Erfolgt die Notation eines Schwingungsverhältnis als Bruch $(^b/_a)$ oder $(^a/_b)$, so wird ein Intervall *oberhalb* oder *unterhalb* einer Note dargestellt.

[3] Mathematisch ist ein Cent als das Schwingungsverhältnis $1:\sqrt[1200]{2}$ definiert. Cents werden nach der Formel Cents = $(^{1200}/_{\log(2)})\cdot\log(^{Freq2}/_{Freq1})$ kalkuliert.

harmonische Verhältnis zwischen zwei Tönen eines Intervalls. Die harmonische Distanz eines Intervalls wird durch die *Anzahl* seiner primären natürlichen Intervalle und die *Größe* ihrer jeweiligen Primzahlen bestimmt. Die größte Primzahl eines Schwingungsverhältnisses wird als das „limit“ des Intervalls bezeichnet.

Zur Verdeutlichung dient der Molldreiklang mit den Schwingungsverhältnissen 10:12:15. Das untere Intervall 10:12 wird auf die einfache (ptolemäische) kleine Terz 5:6 reduziert. Wird das Intervall als oberhalb eines Tons liegend betrachtet, so wird es als der Bruch $({}^{6}/_{5})$ notiert. Der Zähler kann als $2 \cdot 3$ (= 6) geschrieben werden. Der Nenner ist bereits eine Primzahl (5). Da die Zahl 5 die größte Primzahl in diesem Schwingungsverhältnis ist, wird es als *„5-limit“ Intervall* eingestuft. Demnach kann das Intervall als Produkt primärer natürlicher Intervalle notiert werden: $({}^{6}/_{5}) = ({}^{2}/_{1}) \cdot ({}^{3}/_{1}) \cdot ({}^{1}/_{5})$. Diese drei primären Intervalle geben die musikalischen Primärschritte vor, nach denen das Intervall $({}^{6}/_{5})$ von einer gegebenen Note aufwärts konstruiert bzw. gestimmt werden kann: $({}^{2}/_{1})$ bedeutet „eine Oktave aufwärts“; $({}^{3}/_{1})$ bedeutet „eine Oktave und eine Quinte aufwärts“; $({}^{1}/_{5})$ bedeutet „zwei Oktaven und eine Großterz abwärts“. Eine ähnliche Analyse kann auf das obere Intervall 12:15 oder auf das äußere Intervall 10:15 angewendet werden.

Die Vorstellung, dass alle rationalen Schwingungsverhältnisse von primären natürlichen Intervallen abgeleitet werden können, weist auf das multidimensionale Ton-Netz als „Rastermodell“ des Tonhöhenkontinuums hin, welches JAMES TENNEY in seinem Artikel „John Cage and the Theory of Harmony“ (1983) als „harmonic space“ bezeichnet. Jede Primzahl erzeugt eine Achse in diesem „harmonischen Raum“. Natürliche Intervalle können als Koordinaten repräsentiert werden.

Jedes nach Gehör stimmbare Intervall kann als Bruchzahl notiert werden, die in kompakter Form *die gesamte harmonische Information über dessen Klang* enthält. Von diesem Bruch können die *Periodizitätstonhöhe* (der gemeinsame Grundton des Intervalls), die *Kombinationstöne* und der Akkord der *zusammenklingenden Partialtöne* (einschließlich charakteristischer Schwebungen und Unisoni) abgeleitet werden.

In der *Umgebung* jedes stimmbaren Schwingungsverhältnisses gibt es einen *Toleranzbereich*, in welchem Veränderungen der Stimmung hörbare *Schwebungen* und *Phasenverschiebungen* produzieren. Diese Phänomene machen es schwierig oder sogar unmöglich, in derselben Region andere komplexere Intervalle zu stimmen. Stattdessen interpretiert unser Gehör diese als *Verstimmung* oder *Umstimmung* des dominierenden einfacheren Schwingungsverhältnisses *(Temperatur).* Die Existenz solcher jeweils von einem einzigen Schwingungsverhältnis beherrschten Regionen impliziert, dass die Anzahl der nach Gehör stimmbaren Intervalle *begrenzt* ist.

Die Eigenschaft der *Stimmbarkeit* lässt auf folgende Definition schließen: eine *Konsonanz* ist ein Intervall, welches *exakt nach Gehör gestimmt werden kann*. Hiermit werden Konsonanzen von *stimmbaren Dissonanzen* unterschieden, die nur *als Konstruktion* über eine *Folge* von Konsonanzen gestimmt werden können. Harmonische Distanz kann demnach als ein Maß des *Grades* an Konsonanz oder Dissonanz eines Intervalls angesehen werden, eine Eigenschaft, die Schönberg als *Fasslichkeit* beschreibt.

DIE NOTATION

Die *Extended Helmholtz-Ellis JI Pitch Notation* kombiniert zwei Arten der Intervallbeschreibung (linear und proportional) mittels Zeichen, die von der traditionellen Notenschrift abgeleitet sind. Sie erweitert die von HERMANN VON HELMHOLTZ angewendete Idee, die *mikrotonale Kommaänderung* für die Stimmung der reinen Terzen auszunotieren. Sie nutzt außerdem die Methode von ALEXANDER ELLIS, bei der die Größe von Intervallen in Cents gemessen wird. Sie ist eine exakte und volltransponierbare Notation der natürlichen Stimmung *(Just Intonation)*, welche auch irrationale und temperierte Intervalle mit einbezieht.

Jeder Primfaktor, der ein Schwingungsverhältnis bildet, ist mit einer spezifischen *Familie von Vorzeichen* assoziiert, so dass die Bruchzahl des Intervalls direkt aus den kombinierten Vorzeichen erschlossen werden kann. Centangaben über oder unter den Vorzeichen stehen als eine alternative Methode zum Lesen der Tonhöhe zur Verfügung und sollen in Relation zu den zwölf gleichstufig temperierten Halbtönen gelesen werden.

Der Primfaktor 2 wird als eine Äquivalenz verstanden: die gleichen Tonnamen finden in allen Oktaven Anwendung *(Oktaväquivalenz)*. Der Primfaktor 3 ist bereits in der traditionell notierten *Reihe von reinen Quinten* enthalten, in der die Schwingungsverhältnisse 2:3 durch die konventionellen Vorzeichen dargestellt werden (Doppel-b, b, Auflösungszeichen, Kreuz und Doppelkreuz). Diese Zeichen werden *pythagoräische Vorzeichen* genannt. Töne im Abstand von 12 Quinten *unterscheiden sich um ein pythagoräisches Komma* (23.5 Cents). Der Primfaktor 5 wird durch an den pythagoräischen Vorzeichen attachierte Pfeile (auf- oder abwärts) notiert. Ein Pfeil zeigt eine Abweichung um ein *syntonisches Terzkomma* 80:81 (21.5 Cents) an, was den Unterschied zwischen der einfachen (ptolemäischen) großen Terz 4:5 (= 64:80) und der pythagoräischen großen Terz (64:81) ausmacht.

Jeder neue *Primfaktor* bedarf eines neuen *Vorzeichenpaares*, um alle Schwingungsverhältnisse *ober*- und *unterhalb* eines Tons notieren zu können und um ihre Positionen innerhalb des Rasters des „harmonischen Raumes“ von James Tenney genau definieren zu können. Allerdings nimmt die Anzahl neuer Konsonanzen mit steigender Größe der Primfaktoren ab. Primäre natürliche Intervalle, die über die Primzahl 23 hinausgehen, sind sehr schwer zu stimmen und für die meisten Anwendungen kann eine Begrenzung auf die Primfaktoren 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 und 23 in der Notenschrift als ausreichend gelten.

Die Vorzeichen für jede neue Primzahl werden als *mikrotonale Modifizierungen* von melodisch „nahgelegenen“ Tönen definiert, die bereits durch Schwingungsverhältnisse niedrigerer Primfaktoren gebildet wurden. Der 7. Partialton wird zum Beispiel als eine Veränderung des Intervalls notiert, welches aus der Kombination zweier reiner Quarten gewonnen wird (pythagoräische kleine Septime). Dieser Unterschied zwischen den Intervallen 4:7 (= 36:63) und 9:16 (= 36:64) ist das *Septimenkomma* 63:64 (27.3 Cents) und das ihm zugeordnete Vorzeichenpaar sieht einer umgedrehten Ziffer 7 ähnlich.

In der folgenden Tabelle werden diese Alterationen durch Symbole repräsentiert und ausdrücklich als Schwingungsverhältnisse definiert. Eine Alteration wird je nach ihrer Größe „Drittelton“, „Viertelton“, „Komma“ oder „Schisma“ genannt. Die Vorzeichen in der ersten Spalte werden zur Notation von Obertönen benutzt (z.B. der 7. Partialton, etc.) und die Vorzeichen in der zweiten Spalte werden zur Notation der gleichen Intervalle unterhalb eines Tones benutzt (Untertöne). Eine besondere Form der konventionellen Vorzeichen, bei der eine horizontale Linie hinzugefügt wird, die die Form des Buchstabens „T“ suggeriert, wird zur Notation der zwölf gleichstufig temperierten Halbtöne verwendet.

Drei zusätzliche Seiten mit Notenbeispielen sind zur Demonstration der Extended Helmholtz-Ellis JI Pitch Notation angefügt. Sie zeigen die ersten 64 Töne einer harmonischen Reihe basierend auf „A“ (Obertöne), die gleichen Intervalle der harmonischen Reihe *unter* „A“ (Untertöne), die 43-tönige Skala in natürlicher Stimmung von HARRY PARTCH und eine Liste von nach Gehör stimmbaren Intervallen, die über der A-Seite der Violine notiert sind.

The Extended Helmholtz-Ellis JI Pitch Notation

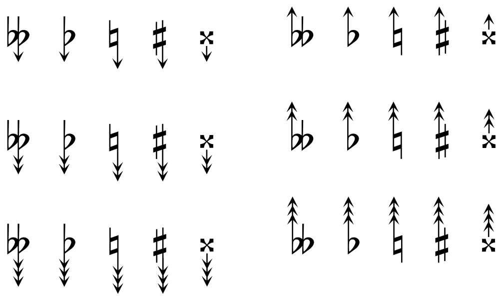
microtonal accidentals designed by Marc Sabat and Wolfgang von Schweinitz, 2004

FUNCTION OF THE ACCIDENTALS

3-LIMIT (PYTHAGOREAN) INTERVALS

notate 35 pitches from the series of untempered perfect fifths
(3/2) ≈ ± 702.0 cents;
perfect fifth (3/2); perfect fourth (4/3); major wholetone (9/8)

5-LIMIT (PTOLEMAIC) INTERVALS



notate an alteration by one syntonic comma (81/80) ≈ ± 21.5 cents;
major third (5/4); minor third (6/5); major sixth (5/3); minor sixth (8/5); minor wholetone (10/9)

notate an alteration by two syntonic commas
(81/80)·(81/80) ≈ ± 43.0 cents;
augmented fifth (25/16); diminished fourth (32/25)

notate an alteration by three syntonic commas
(81/80)·(81/80)·(81/80) ≈ ± 64.5 cents;
minor diesis (128/125)

7-LIMIT (SEPTIMAL) INTERVALS

notate an alteration by one septimal comma (64/63) ≈ ± 27.3 cents;
natural seventh (7/4); septimal wholetone (8/7);
septimal diminished fifth (7/5); septimal tritone (10/7);
septimal minor third (7/6); septimal quartertone (36/35)

notate an alteration by two septimal commas
(64/63)·(64/63) ≈ ± 54.5 cents;
septimal sixthtone (49/48)

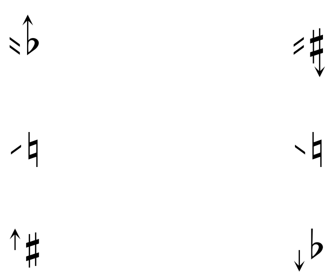
11-LIMIT (UNDECIMAL) INTERVALS

notate an alteration by one undecimal quartertone
(33/32) ≈ ± 53.3 cents;
undecimal augmented fourth (11/8); undecimal diminished fifth (16/11)

13-LIMIT (TRIDECIMAL) INTERVALS

notate an alteration by one tridecimal thirdtone (27/26) ≈ ± 65.3 cents;
tridecimal neutral sixth (13/8); tridecimal neutral third (16/13)

PRIMES IN THE HARMONIC SERIES OCTAVE 16 - 32 *(5-limit signs are given here relative to “A”)*



notate an alteration of the 5-limit accidental by one 17-limit schisma
(16/17)·(16/15) = (256/255) ≈ ± 6.8 cents;
Galileo’s “equal-tempered” semitone (18/17);
17-limit diminshed seventh chord 10:12:14:17

notate an alteration by one 19-limit schisma
(19/16)·(27/32) = (513/512) ≈ ± 3.4 cents;
19-limit minor third (19/16); 19-limit minor triad 16:19:24

notate an alteration by one 23-limit comma
(23/16)·(8/9)·(8/9)·(8/9) ≈ ± 16.5 cents;
raised leading tone (23/12)

notate an alteration of the 5-limit accidental by one 29-limit comma
(29/16)·(5/9) = (145/144) ≈ ± 12.0 cents

notate an alteration of the 11-limit accidental by one 31-limit schisma
(32/31)·(32/33) = (1024/1023) ≈ ± 1.7 cents

PRIMES IN THE HARMONIC SERIES OCTAVE 32 - 64 *(5-limit signs are given here relative to “A”)*

notate an alteration of the 11-limit accidental by one 37-limit schisma
(36/37)·(33/32) = (297/296) ≈ ± 5.8 cents

notate an alteration of the 5-limit accidental by one 41-limit schisma
(32/41)·(81/64)·(81/80) = (6561/6560) ≈ ± 0.3 cents

notate an alteration by one 43-limit comma
(43/32)·(3/4) = (129/128) ≈ ± 13.5 cents

or — or

notate an alteration of the 7-limit accidental by one 47-limit schisma
(32/47)·(48/49)·(3/2) = (2304/2303) ≈ ± 0.8 cents

notate an alteration of the 5-limit accidental by one 53-limit comma
(32/53)·(5/3) = (160/159) ≈ ± 10.9 cents

notate an alteration of the 13-limit accidental by one 59-limit schisma
(32/59)·(24/13) = (768/767) ≈ ± 2.3 cents

notate an alteration of the 7-limit accidental by one 61-limit schisma
(61/32)·(21/40) = (1281/1280) ≈ ± 1.4 cents

IRRATIONAL AND TEMPERED INTERVALS

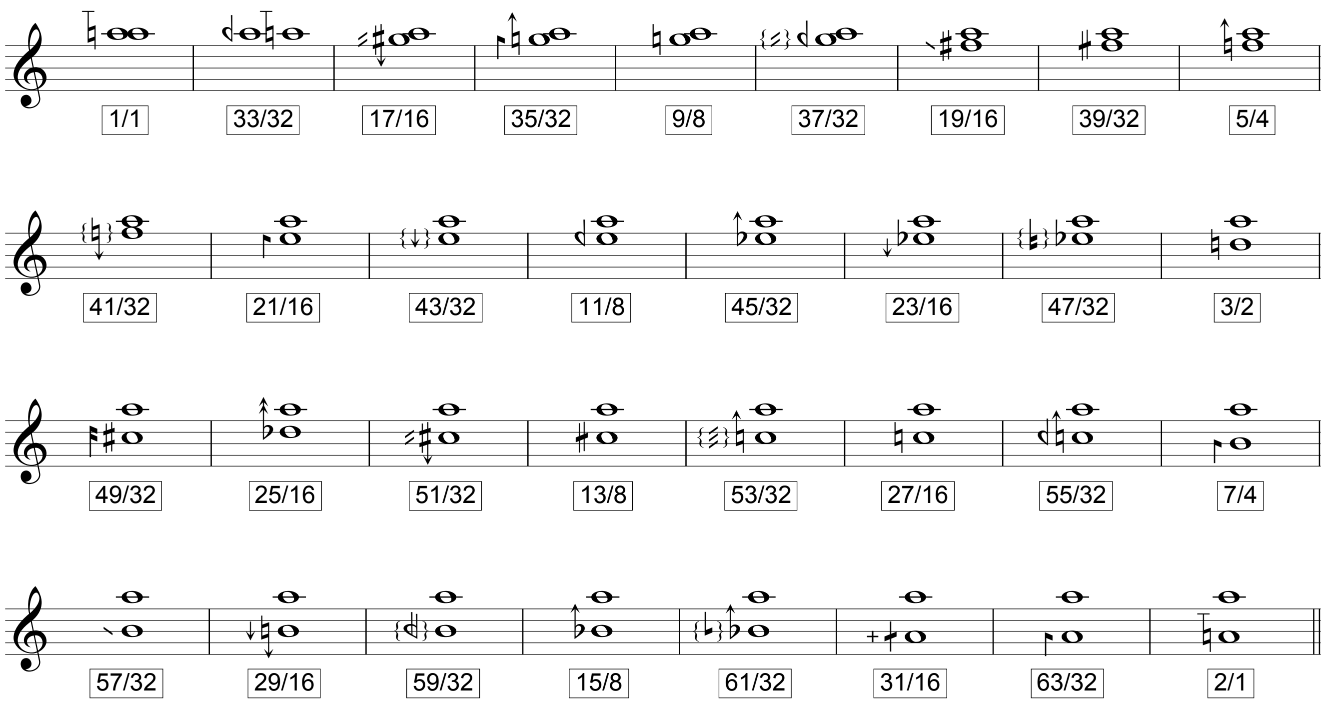
notate the respective Equal Tempered Semitone;
may be combined with a cents indication to notate any pitch

NOTE ABOUT CENTS INDICATIONS

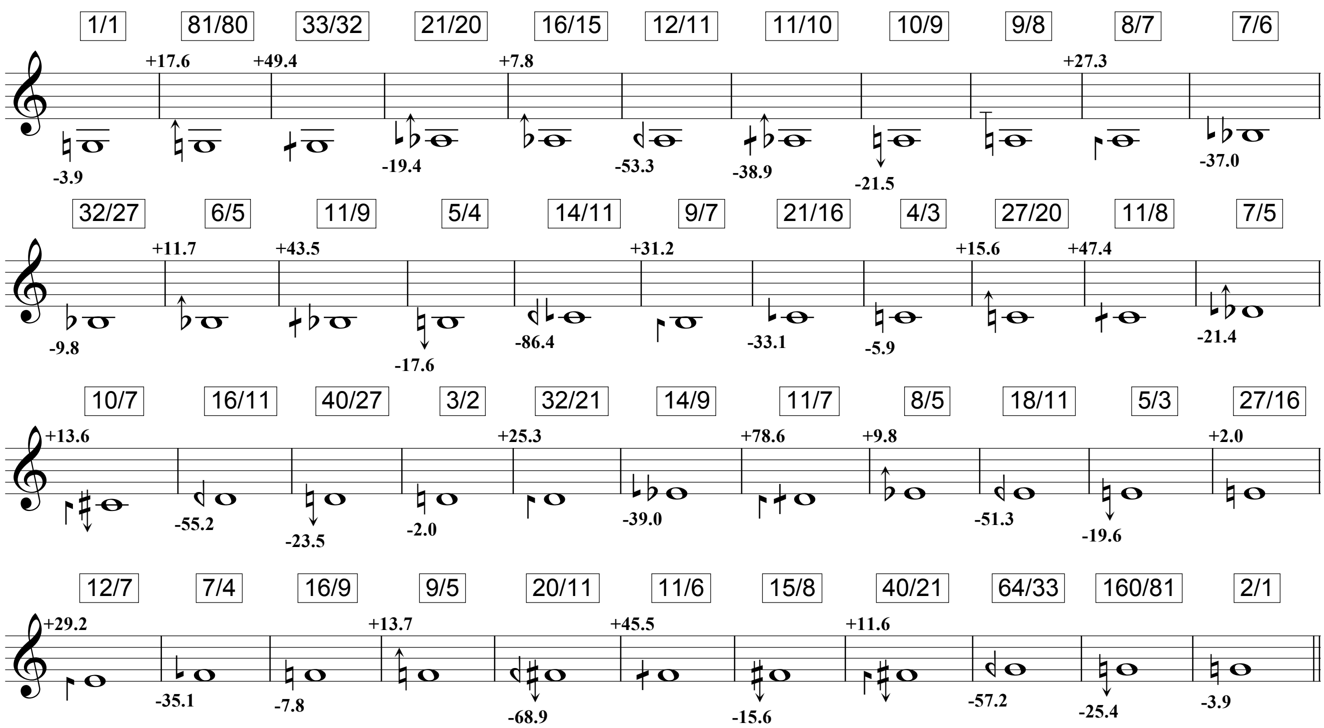
optional cents indications may be placed above or below the respective accidentals and are always understood in reference to Equal Tempered semitones, as implied by the Pythagorean accidentals

THE HARMONIC SERIES 1 - 64 ABOVE “A” (overtone row)

HARMONIC SERIES INTERVALS BELOW “A” (undertone row)



HARRY PARTCH’S 43 - NOTE SCALE OF PITCHES IN JUST INTONATION



revised INTERVALS TUNEABLE BY EAR (under 3 Octaves wide)

tested and notated above the violin A-string